

---

## STUDI LITERATUR REVIU: DINAMIKA PENALARAN DAN ARGUMENTASI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Sukirwan<sup>1</sup>, Dedi Muhtadi<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Universitas Sultan Ageng Tirtayasa, Jln. Raya Palka Km 3, Sindangsari 42163, Banten, Indonesia

<sup>2</sup>Universitas Siliwangi, Jln. Siliwangi No. 24, Tasikmalaya 46115, Jawa Barat, Indonesia

\*Corresponding Author: dedimuhtadi@unsil.ac.id

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan studi literatur berkenaan dengan dinamika penalaran dan argumentasi serta bagaimana penalaran dan argumentasi direkonstruksi dalam pembelajaran matematika. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa problematika penalaran berkaitan dengan kritik terhadap kekakuan dalam membangun argumentasi formal. Hal tersebut telah memberikan tantangan bagi para praktisi pembelajaran matematika untuk mengkaji tentang bagaimana penalaran dan argumentasi dibangun dalam suatu aktivitas pembuktian matematis dan menempatkan matematika sebagai aktivitas manusia. Penelitian ini menggunakan metode SLR (*Systematic Literature Review*). Pengumpulan data dilakukan dengan mendokumentasikan dan mereviu berbagai artikel yang berkaitan dengan penalaran dan argumentasi serta penalaran dan bukti matematis pada rentang waktu antara 2012-2022 termasuk artikel-artikel babon yang ditemukan pada kurun waktu sebelumnya. Sintesis artikel dilakukan pada 10 artikel jurnal internasional yang diperoleh dari database *Google Scholar* menggunakan aplikasi Publish or Perish 8. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: (1) studi penalaran dan argumentasi berfokus pada bagaimana seseorang bernalar yang sebenarnya, dan (2) studi penalaran dan argumentasi mencakup studi tentang: kemampuan argumentasi, kualitas penalaran, struktur argumentasi, taksonomi skema pembuktian, tipe argumentasi, dan justifikasi argumentasi yang tetap relevan hingga saat ini.

**Kata kunci:** pembelajaran matematika, pembuktian matematis, penalaran dan argumentasi

### Abstract

This study aims to conduct a literature study regarding the dynamics of reasoning and argumentation and how reasoning and argumentation are reconstructed in teaching and learning mathematics. Several studies have shown that the reasoning problem is related to criticism of rigidity in constructing formal arguments. This has provided a challenge for practitioners of learning mathematics to examine how reasoning and argumentation are built in a mathematical proof activity and place mathematics as a human activity. This study uses the SLR (Systematic Literature Review) method. Data collection was carried out by documenting and reviewing various articles related to reasoning and argumentation as well as mathematical reasoning and proof in 2012-2022, including baboon articles found in the previous period. Article synthesis was carried out on ten international journal articles obtained from the Mendeley, ScienceDirect, and Google Scholar databases using the Publish or Perish eight application. The results showed that: (1) the study of reasoning and argumentation focused on how a person reasoned, and (2) the study of reasoning and argumentation included the study of argumentation ability, reasoning quality, argumentation structure, the taxonomy of proof schemes, types of arguments, and justification of valid arguments remain relevant today.

**Keywords:** teaching and learning of mathematics, mathematical proofing, reasoning and argumentation

## 1. Pendahuluan

Penalaran merupakan kemampuan matematis fundamental yang *inheren* dalam pembelajaran matematika. Hal ini tidak terlepas dari fungsi dan peran penalaran yang berkaitan erat dengan berbagai kemampuan matematis lainnya, seperti: komunikasi, pemecahan masalah, berpikir kritis, dan sebagainya [1 - 4]. Penalaran juga terkait erat dengan argumentasi [5, 6] dan bukti matematis [7]. Istilah penalaran dan argumentasi maupun penalaran dan bukti merupakan dua istilah yang saling melengkapi dan tidak bisa dipisahkan satu sama lain. Sedangkan argumentasi dan bukti merupakan satu rangkaian proses matematis yang bersifat hierarkis, terutama bila bukti dipandang sebagai argumentasi yang sifatnya formal [8].

Studi tentang penalaran pada dasarnya bukan merupakan hal baru dan telah menjadi tema yang berulang dalam penelitian pendidikan matematika [9]. Studi ini umumnya didasari oleh keinginan untuk mengetahui bagaimana seseorang bernalar dengan sebenarnya [10]. *The National Council of Teachers Mathematics* [11] menyatakan bahwa matematika merupakan penalaran artinya seseorang yang bekerja dengan matematika tidak akan terpisahkan dari aktivitas penalaran. Pernyataan ini mempertegas tentang eksistensi penalaran sebagai fondasi dalam membangun pengetahuan matematis. Di samping itu, permasalahan-permasalahan yang berkaitan dengan matematika tentu saja akan berkaitan dengan penalaran.

Pada berbagai studi dilaporkan bahwa permasalahan yang berkaitan dengan penalaran menunjukkan situasi yang kompleks. Rosnawati [12] menyatakan rata-rata presentase peserta didik di Indonesia pada kemampuan ini paling rendah dan hanya mencapai 17%. Studi sebelumnya melaporkan bahwa rata-rata pencapaian kemampuan penalaran matematis adalah sebesar 28,15% [13]. Hasil studi ini bahkan merinci rendahnya tingkat pencapaian kemampuan penalaran matematis berkaitan dengan kemampuan: menganalisa, mengintegrasikan, memberi alasan, dan memecahkan soal-soal non-rutin yang rata-rata hanya mencapai 13,33% untuk kategori tinggi, dan 14,82% untuk kategori sedang dan rendah. Studi ini kemudian memperjelas bahwa permasalahan yang berkaitan dengan penalaran tidak hanya terfokus pada kemampuan dalam memecahkan masalah matematis tetapi bagaimana menyajikan penalaran dalam konteks yang lebih luas, yaitu; membuat pernyataan, memberikan penjelasan, dan menunjukkan alasan [14]. Seperti yang diungkapkan oleh Krummheuer [15] bahwa ketika siswa berhadapan dengan penalaran, hal terpenting adalah bagaimana siswa dapat mengkomunikasikan, menjustifikasi, dan membuktikan ide-ide matematis dalam rangka meyakinkan ide-ide tersebut kepada orang lain. Hal ini selanjutnya mengantarkan kepada pentingnya studi penalaran dalam konteks yang lebih luas yang tidak hanya berorientasi pada produk tetapi pada proses bernalar.

Studi terkait dengan penalaran pada dasarnya telah di mulai sejak lama. Studi ini bermula dari munculnya kritik terhadap logika formal yang terfokus pada kerangka penalaran deduktif. Seorang cendekiawan Inggris, Toulmin [16] memformulasikan tentang penggunaan argumentasi yang menjembatani kesenjangan antara logika dengan praktik nyata. Sejak saat itu muncul beragam studi tentang penalaran yang dikaitkan dengan argumentasi dan bukti matematis [16, 17] maupun proses atau

kualitas penalaran [19]. Dalam dokumen PISA [5] disebutkan bahwa penalaran dan argumentasi merupakan salah satu kemampuan matematis fundamental yang diperlukan dalam membangun literasi matematis. Sedangkan dalam dokumen NCTM [11], disebutkan bahwa penalaran dan bukti merupakan standar proses pembelajaran matematika.

Dalam dokumen nasional [20] juga disebutkan bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah menggunakan penalaran, menyusun bukti, dan menjelaskan gagasan serta pernyataan matematika. Tujuan dari penalaran tersebut telah berimplikasi pada beragam studi berkaitan penalaran, seperti: keterampilan berpikir tingkat tinggi [21], proses deduktif-induktif [22], penalaran dan argumentasi, maupun penalaran dan bukti [18]. Hal tersebut menunjukkan betapa pentingnya studi yang berkaitan dengan penalaran.

Menurut Lithner [19], studi mengenai penalaran menempatkan studi yang sangat kompleks karena berkenaan dengan proses berpikir (*thinking process*) dan produk dari proses berpikir (*thinking product*). Penelusuran terhadap produk dari proses berpikir tentu saja tidak akan cukup menggambarkan tentang bagaimana seseorang melakukan aktivitas penalaran yang sebenarnya, tetapi perlu ditelusuri bagaimana proses berpikir seseorang untuk menghasilkan produk penalaran tersebut. Penelusuran terhadap bagaimana proses berpikir tersebut berkenaan studi terhadap penalaran dan argumentasi.

Sampai saat ini, telah banyak studi yang berkaitan dengan penalaran dan argumentasi yang terdokumentasi pada *online database*, seperti Google Scholar. Meskipun begitu, beragam hasil studi tersebut masih berserakan dan cenderung membingungkan bagi para peneliti yang akan mengkaji tentang penalaran dan argumentasi. Oleh karena itu, penelusuran terhadap *literature review* penting untuk dilakukan sehingga dapat diperoleh informasi yang komprehensif tentang *state of the art* penelitian yang berkaitan dengan penalaran dan argumentasi, agenda penelitian, serta arah penelitian berikutnya.

## 2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Systematic Literature Review (SLR)*, yaitu dengan melakukan identifikasi, meninjau/mengkaji, mengevaluasi, dan menafsirkan semua hasil penelitian yang tersedia [23, 24]. Secara umum SLR dalam penelitian ini meliputi empat tahapan, yaitu: menentukan tujuan SLR, inisiasi dan memilih pustaka, analisis dan *coding*, dan presentasi hasil [25]. Tujuan dari SLR ini adalah mengetahui dinamika penalaran dan argumentasi yang memberikan *iluminasi* tentang cara bernalar yang sebenarnya serta mengidentifikasi arah penelitian yang berkaitan dengan penalaran, argumentasi, dan pembuktian matematis. Berdasarkan pada tujuan tersebut, peneliti menentukan kriteria dan *pilot searching* untuk mengumpulkan artikel jurnal yang terdokumentasi pada database *Google Scholar* menggunakan aplikasi Publish or Perish 8 dengan limit pencarian hingga 500 artikel dan berulang. Kriteria pencarian yang ditetapkan dalam penelitian ini, meliputi: kata

kunci pencarian, rentang waktu penerbitan artikel, *backward and forward citation*, termasuk perbaikan hasil pencarian sampai didapatkan kriteria yang dibutuhkan.

Kata kunci yang digunakan dalam pencarian artikel adalah penalaran matematis, argumentasi matematis, dan bukti matematis ataupun perpaduan antara penalaran dan argumentasi matematis, atau penalaran dan bukti matematis. Selain itu digunakan juga kata kunci yang terkait erat dengan kata atau istilah yang sepadan atau kata yang menyertai kata utamanya termasuk istilah dalam bahasa Inggris, yaitu: kualitas penalaran matematis, argumen matematis, pembuktian matematis, *mathematical reasoning*, *mathematical argumentation*, *mathematical argument*, dan seterusnya. Perluasan kata kunci ini dilakukan dalam rangka melengkapi artikel yang dikumpulkan serta memperbaiki hasil pencarian. Artikel yang dikumpulkan dalam penelitian ini adalah artikel yang diterbitkan dalam rentang waktu antara 2012 hingga 2022. Artikel-artikel tertentu, terutama artikel-artikel babon di luar rentang waktu yang ditetapkan ditelusuri secara khusus berdasarkan informasi penelusuran yang diperoleh dari pencarian artikel sebelumnya.

Pada tahapan berikutnya, peneliti melakukan analisis dan *coding* dengan mentabulasi data artikel, *screening* data dan *coding*, mengolah data sesuai dengan rumusan dan tujuan penelitian, serta menyusun data yang diperoleh sehingga bermakna. Tabulasi data dilakukan dengan menyusun metadata artikel pada tabel yang memuat nama peneliti, judul artikel, nama jurnal, tahun terbit, jenis/metode penelitian, serta hasil penelitian. *Screening* data berikutnya dilakukan mencermati kembali artikel sesuai dengan rumusan dan tujuan penelitian, memisahkan antara artikel yang terkait langsung dan tidak langsung dengan penelitian, mengeliminasi artikel-artikel yang tidak mendukung atau kurang relevan terhadap penelitian, serta memilih artikel-artikel yang mewakili atau paling kuat relevansinya dengan rumusan dan tujuan penelitian. Sedangkan *coding* digunakan untuk mempermudah pengidentifikasian terhadap kategori-kategori yang muncul dari hasil *data extraction*. Kategori-kategori dari hasil *data extraction* ini selanjutnya di analisis berdasarkan pada rumusan dan tujuan penelitian sehingga memberikan makna tentang substansi penelitian.

Tahapan terakhir dari SLR ini adalah presentasi hasil. Pada tahap ini, peneliti menyajikan hasil penelitian dengan menetapkan temuan-temuan sesuai dengan rumusan masalah yang diajukan serta membandingkan temuan-temuan tersebut hingga diperoleh simpulan. Hasil penelitian disajikan dalam 2 bentuk: (1) penjelasan deskriptif, dan (2) pengetahuan komprehensif [25]. Penjelasan deskriptif merupakan rangkuman dari artikel-artikel yang telah melalui proses *screening* data serta *data extraction* yang disajikan dalam bentuk tabel, memuat: nama peneliti, tema penelitian, karakteristik studi, dan lain-lain. Sedangkan pengetahuan komprehensif adalah ulasan tentang temuan penelitian yang mendukung terhadap rumusan masalah yang diajukan, hubungan sebab-akibat, maupun model/tipe penelitian yang melengkapi penelitian sebelumnya.

### 3. Hasil dan Diskusi

Pada pencarian awal artikel terkait dengan penalaran dan argumentasi dengan kata kunci yang ditentukan sebelumnya diperoleh data sebanyak 3.460 metadata. Dari sejumlah metadata tersebut, terdapat beberapa artikel yang sumbernya tidak ada, artikel yang *double input* dalam database, serta artikel-artikel yang tidak relevan dengan tujuan yang ditargetkan. Untuk itu, dilakukan proses *screening* data sehingga dihasilkan data yang lebih akurat. Tahapan hasil *screening* data selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Hasil *Screening* Metadata Penalaran dan Argumentasi Matematis

No	<i>Screening</i> Data	Jumlah
1	Data Awal	3.460
2	Sumber Data	2.696
3	<i>Open Access</i> (Ketersediaan Akses Jurnal)	2.106
4	<i>Double</i> Metadata	1.786
5	Relevansi	438

Berdasarkan informasi yang tersaji pada Tabel 1, terdapat 438 buah artikel yang relevan dengan topik penalaran dan argumentasi; terdiri dari: 11 buah artikel dengan tema penalaran dan argumentasi maupun penalaran dan bukti, 56 buah artikel dengan tema argumentasi, 22 buah artikel dengan tema bukti, serta 349 buah artikel dengan tema penalaran. Penalaran merupakan tema paling kompleks jika dibandingkan dengan argumentasi dan bukti. Meskipun demikian, secara umum terdapat 2 bahasan utama terkait dengan tema penalaran, yaitu: penalaran yang berorientasi pada produk, yang secara spesifik membahas tentang kemampuan penalaran (*reasoning ability*) sebanyak 150 artikel, dan penalaran yang berorientasi pada proses, yang secara spesifik membahas tentang kualitas penalaran (*reasoning quality*) sebanyak 199 artikel.

Kualitas penalaran berkaitan erat dengan argumentasi dan bukti. Seperti yang diungkapkan oleh Bludjan [10], argumen dan komunikasi secara matematis merupakan inti dari kualitas penalaran. Sedangkan, Douek [26] menyatakan bahwa argumentasi merupakan upaya seseorang untuk meyakinkan orang lain, dan Zarefsky [27] menyatakan bahwa argumentasi merupakan studi efektif penalaran. Ketiga pendapat tersebut menunjukkan bahwa argumentasi atau bukti merupakan istilah yang hampir sepadan dengan penalaran, meskipun tidak identik. Karena argumentasi terkait erat dengan penalaran, maka bahasan mengenai argumentasi juga merupakan bahasan tentang penalaran dan argumentasi. Demikian pula, bahasan mengenai bukti juga merupakan bahasan tentang penalaran dan bukti. Dengan demikian, untuk tema artikel mengenai argumentasi, bukti, maupun penalaran dan argumentasi ataupun penalaran dan bukti dapat dipadukan menjadi satu tema, yaitu: penalaran dan argumentasi dengan total artikel sebanyak 89 buah artikel.

Pada tahapan *data extraction*, terdapat beragam subtema dan bahasan mengenai penalaran dan argumentasi, di antaranya: struktur argumentasi, taksonomi skema pembuktian, tipe argumentasi, justifikasi argumentasi, serta tema-tema umum lainnya, utamanya tentang pembuktian formal. Subtema-subtema tersebut menarik untuk dikaji karena semuanya bermuara pada bagaimana bukti disajikan dalam pembelajaran secara informal dan formal. Untuk itu, dipilih 10 artikel yang paling mewakili setiap subtema penelitian, memuat struktur penyajian yang koheren, pengumpulan dan analisis data yang efektif dan efisien, pembahasan yang lengkap,

serta paling menggambarkan tentang subtema penelitian. Delapan artikel merupakan artikel yang diperoleh dari hasil *data extraction*, sedang 2 artikel sisanya merupakan artikel babon yang secara konseptual menjadi *piloting* munculnya beragam subtema dan bahasan tentang penalaran dan argumentasi. Kesepuluh artikel tersebut selengkapnya disajikan pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Subtema Penalaran dan Argumentasi dalam Pembelajaran Matematika

Penulis	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Krummheuer [15]*			√			
Lithner [19]*		√				
Yusdiana & Hidayat [28]	√					
Krummheuer [29]			√			
Jonsson, <i>et al.</i> [30]		√				
Akkurt & Durmus [31]				√		
Komatsu & Jones [32]			√			
Liu, Tague, & Somayajulu [33]					√	
Sevgi & Orman [34]						√
Guner & Topan [35]				√		

Keterangan: \* = Babon

P1 = Kemampuan Penalaran

P2 = Kualitas Penalaran

P3 = Struktur Argumentasi

P4 = Taksonomi Skema Pembuktian

P5 = Tipe Argumentasi

P6 = Justifikasi Argumentasi

### 3.1. Temuan Penelitian

#### Kemampuan penalaran

Bahasan tentang kemampuan penalaran (*reasoning ability*) termasuk tema yang paling banyak ditemukan dalam pencarian. Yusdiana & Hidayat [28] meneliti tentang kemampuan penalaran matematis berdasarkan pada kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal-soal penalaran matematis. Soal-soal tersebut disusun berdasarkan pada indikator kemampuan penalaran matematis yang ditetapkan. Sebanyak 20 orang siswa diminta untuk menyelesaikan soal-soal tersebut. Penilaian dilakukan dengan menggunakan rubrik holistik, lalu disusun kategorisasi berdasarkan pada presentasi kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal pada setiap indikator. Untuk mengkonfirmasi jawaban siswa, peneliti juga melakukan wawancara terhadap siswa terutama untuk mendeteksi kesalahan yang dilakukan oleh siswa, ketidaktuntasan dalam menyelesaikan soal, ataupun temuan lain yang berbeda.

Penelitian yang sama juga dilakukan oleh Saputri, Susanti, & Aisyah [36]. Meskipun ketiga peneliti menggunakan *treatment* untuk mendukung terhadap pencapaian kemampuan penalaran matematis siswa, peneliti menetapkan pencapaian tersebut berdasarkan pada kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal-soal penalaran matematis. Soal-soal kemampuan penalaran matematis juga disusun berdasarkan pada indikator yang ditetapkan. Untuk melihat tingkat kemampuan penalaran matematis siswa, peneliti melakukan wawancara terhadap siswa sehingga diperoleh informasi yang komprehensif tentang cara-cara siswa dalam menyelesaikan soal kemampuan penalaran matematis.

### **Kualitas Penalaran**

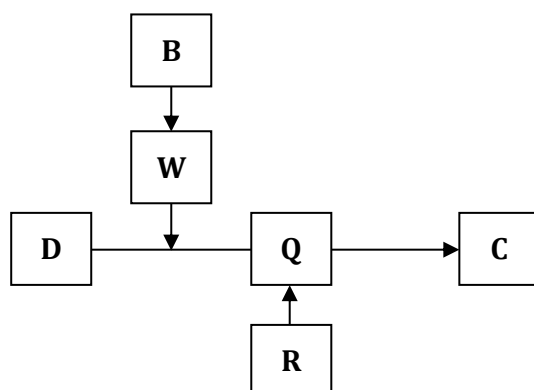
Istilah kualitas penalaran pada dasarnya merujuk kepada penalaran yang baik (*good reasoning*), yang tidak hanya terbatas pada penalaran verbal [37] tetapi bagaimana suatu pernyataan memuat alasan yang memadai dan mendapat pengakuan sebagai aktivitas penalaran. Istilah ini juga membedakan dengan aktivitas matematis yang hanya sampai pada jawaban yang benar atas suatu pertanyaan yang mengandung penalaran. Jadi, kualitas penalaran berupaya untuk melihat secara obyektif tentang bagaimana suatu penalaran dikonstruksi. Dalam artikel Jonsson, *et al.* [30] disebutkan dua jenis penalaran, yaitu: penalaran algoritmik dan penalaran kreatif. Penalaran algoritmik adalah penalaran yang dibangun berdasarkan aktivitas mengingat suatu algoritma atau tindakan dalam mengikuti seperangkat aturan tertentu. Sedangkan, penalaran kreatif adalah penalaran yang didasarkan pada daya cipta, yakni kemampuan menghasilkan suatu karya yang bermakna dan orisinal. Artikel yang ditulis oleh Jonsson, *et al.* [30] bersumber dari artikel Lithner [19] yang menyebut 2 jenis penalaran, yaitu: penalaran imitatif dan penalaran kreatif. Kedua jenis penalaran tersebut dibedakan dari proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah. Penalaran imitatif berkaitan dengan penalaran yang dihafal (*route learning*), menyalin atau mengikuti contoh atau model yang tanpa orisinalitas atau berdasarkan pada pengalaman sebelumnya. Penalaran algoritmik termasuk ke dalam penalaran imitatif karena dibangun dengan menuliskan setiap langkah atau algoritma yang telah dihafal sebelumnya. Selain itu, ada juga penalaran hafalan (*memorized reasoning*) yaitu penalaran yang didasarkan pada strategi mengingat jawaban dengan hafalan atau memori, sedangkan implementasi strategi dibuat hanya dengan menuliskan jawaban. Penalaran kreatif adalah penalaran yang didasarkan pada kemampuan menghasilkan karya orisinal dan bermakna. Istilah orisinal membatasi perbedaan antara kedua tipe penalaran di mana strategi yang dibangun dalam penalaran kreatif tidak merujuk kepada berpikir superior tetapi bisa sederhana dan original untuk individu yang membuat penyelesaian masalah. Terdapat 4 karakteristik penalaran kreatif, yaitu: (1) kebaruan (*novelty*), yaitu penalaran yang dibuat atau diciptakan kembali, solusi yang dibuat adalah baru baginya, (2) fleksibilitas (*flexibility*), yaitu lancar atau mampu membuat beragam cara atau pendekatan yang berbeda dari masalah tertentu, (3) masuk akal (*plausibility*), yaitu terdapat argumentasi yang mendukung pilihan dan/atau strategi, serta mampu menjelaskan mengapa simpulan itu benar atau masuk akal, (4) landasan matematis yang kuat (*mathematical foundation*), yaitu argumentasi dibangun berdasarkan karakteristik instrinsik matematis yang merujuk pada sifat matematika yang relevan dengan penyelesaian tugas dan dapat diterima oleh kalangan matematikawan.

Istilah argumentasi yang muncul dalam kerangka Lithner [38] merupakan bagian dari penalaran yang bertujuan untuk mengkonfirmasi jawaban dalam rangka meyakinkan diri sendiri atau orang lain bahwa penalaran tersebut sudah tepat. Karena argumentasi berkaitan dengan proses berpikir dalam penalaran, maka argumentasi juga dapat dikategorikan sebagai kualitas penalaran.

### **Struktur Argumentasi**

Struktur argumentasi termasuk bahasan yang fenomenal karena muncul dari kritik terhadap logika formal yang sangat kaku. Toulmin [16] memandang adanya kesenjangan antara logika formal dengan praktik nyata. Menurut Toulmin [9], validitas logis adalah bukan yang utama, tetapi berorientasi pada isi semantik dan struktur yang cocok. Argumentasi Toulmin dipandang sebagai argumentasi yang berorientasi pada logika informal, meskipun masih memuat analisis formal. Toulmin mengusulkan suatu model argumentasi yang dikenal dengan struktur argumentasi

model Toulmin atau *Toulmin Argumentation Pattern* (TAP). Skema dari model argumentasi Toulmin ini digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 1.** Model Argumentasi Toulmin

Menurut Toulmin [39], argumentasi merupakan *claim* (C) yang berasal dari *data* (D) berdasarkan *warrant* (W). *Warrant* (W) harus didukung oleh *Backing* (B) yang menjadi dasar di mana suatu inferensi dibangun. *Rebuttal* (R) secara potensial membantah *claim* (C) untuk kondisi di mana hal tersebut tidak terpenuhi, dan *modal qualifier* (Q) menunjukkan kekuatan simpulan yang bisa ditarik, bahwa pernyataan tersebut telah sah karena metode telah dinyatakan secara eksplisit dalam *backing* (B) untuk *warrant* (W).

Struktur argumentasi Toulmin banyak diadopsi oleh para peneliti untuk mengkaji bagaimana suatu argumentasi dikonstruksi. Meskipun begitu, tidak semua pernyataan tersebut dapat diungkapkan secara jelas [40]. Dalam perkembangannya, para peneliti melakukan modifikasi terhadap skema Toulmin. Krummheuer [15] menghilangkan 2 pernyataan dari skema asli, yaitu: *rebuttal* (R) dan *modal qualifier* (Q). Menurut Krummheuer [29] peneliti cenderung mengabaikan kedua pernyataan tersebut pada saat menganalisis argumentasi matematis siswa, yang mungkin muncul dari definisi argumentasi matematis itu sendiri.

### Taksonomi Skema Pembuktian

Meskipun argumentasi Toulmin dipandang cukup fenomenal dalam mengungkapkan argumentasi, namun demikian beberapa peneliti tetap mengajukan kritik terhadap eksistensi pernyataan yang lepas dari kontrol skema argumentasi. Dalam artikel Akkurt & Durmus [31] diungkapkan tentang penelusuran terhadap skema pembuktian dengan tetap berpatokan kepada skema pembuktian Harel & Showder [41], yang terdiri dari: skema pembuktian empiris dan analitis. Skema pembuktian empiris adalah skema pembuktian induktif atau perseptual di mana siswa bergantung kepada bayangan mental atau contoh-contoh untuk memverifikasi dan memvalidasi argumentasi. Sedangkan skema pembuktian analitis merupakan skema pembuktian aksiomatis atau transformasional yang melibatkan definisi, postulat, dan konjektur.

Sementara itu, Guner & Topan [35] mengklasifikasikan 5 taksonomi skema pembuktian, terdiri dari: (1) kosong (*empty*), pertanyaan yang tidak ingin dijawab oleh individu, tidak termasuk ekspresi atau solusi matematika, (2) bahasa matematis (*mathematical language*), mencakup representasi simbolis dari ekspresi matematika tanpa adanya pembenaran apapun, tidak termasuk soal atau hubungan antara

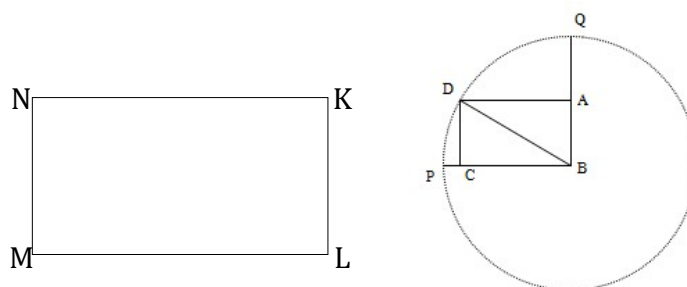


konsep matematika, (3) bukti tidak valid (*invalid proof*), menunjukkan pendekatan matematis yang tidak tepat serta menggunakan representasi matematis yang tidak valid, termasuk presentasi solusi yang salah atau tak relevan, (4) bukti yang tak lengkap (*incomplete proof*), menunjukkan bahwa individu mengetahui subyek tetapi buktinya tak lengkap karena keterbatasan pengetahuan dan tidak mampu mengaitkan konsep matematika yang diperlukan, termasuk solusi yang sebagian benar tetapi tidak mampu menyajikan seluruh jawaban, (5) bukti yang valid (*valid proof*), menunjukkan bahwa individu mampu menggunakan prinsip, sifat, dan asumsi yang sesuai, memahami hubungan logis di antaranya, dan mampu mentransfer ke kasus yang berbeda. Taksonomi model Guner & Topan [35] pada prinsipnya sama dengan model Harel & Showder [41], Stylianides [18], dan Balacheff [42].

### Tipe Argumentasi

Tipe argumentasi berkaitan dengan cara siswa dalam menyajikan representasi matematis. Dalam artikel Liu, Tague, & Somayajulu [33] diuraikan 4 tipe argumentasi, yaitu: induktif, aljabar, visual dan perseptual. Argumentasi induktif adalah argumentasi yang dikonstruksi dengan menawarkan contoh-contoh yang mendukung validitas konjektur; argumentasi aljabar merupakan argumentasi yang dinyatakan dalam representasi simbolik yang kemudian direpresentasikan kembali; argumentasi visual adalah argumentasi yang disajikan dalam representasi gambar atau grafik; sedangkan argumentasi perseptual adalah argumentasi yang disajikan dalam kerangka konteks yang dikenal dan didukung oleh suatu konjektur.

Pada praktiknya, argumentasi yang dihasilkan mungkin terlihat identik. Seperti yang dicontohkan oleh Liu [43] ketika siswa mengklaim bahwa diagonal suatu persegi panjang memiliki ukuran lebih panjang dari sisi-sisi persegi panjang. Pada argumentasi aljabar, siswa menyatakan bahwa karena besar  $\angle K = 90^\circ$ , maka berdasarkan teorema Pythagoras,  $LN^2 = KL^2 + KN^2$ . Jadi  $LN^2 > KL^2$  dan  $LN^2 > KN^2$ . Dengan demikian,  $LN > KL$  dan  $LN > KN$ . Pada argumentasi visual, siswa menyatakan bahwa  $BD = BQ = BP$ .  $BC < BP$  dan  $BA < BQ$ , sehingga  $BA < BD$  dan  $BC < BD$ .



**Gambar 2.** Visualisasi untuk Argumentasi Aljabar dan Visual

Ilustrasi yang diperlihatkan pada Gambar 2 menunjukkan bahwa argumentasi aljabar hampir identik dengan argumentasi visual. Meskipun begitu orientasi jawaban yang dikonstruksi oleh siswa nampak berbeda. Visualisasi gambar pada argumentasi aljabar membantu siswa untuk merumuskan persamaan aljabar, sedangkan pada argumentasi visual, gambar menjadi satu-satunya cara untuk menyatakan hubungan antara diagonal dengan sisi persegi panjang. Dalam konsteks yang berbeda, argumentasi aljabar tidak memerlukan visualisasi gambar, sedangkan argumentasi visual sangat tergantung pada gambar.

### Justifikasi Argumentasi

Justifikasi argumentasi berkaitan dengan penilaian yang diberikan seseorang terhadap argumentasi yang dikonstruksinya. Dalam artikel Sevgi & Orman [34] diungkapkan bahwa struktur mental siswa dalam mengembangkan keterampilan pembuktian tidak percaya bahwa semua informasi adalah mutlak benar. Hal ini menunjukkan bahwa siswa umumnya merasa tidak yakin dengan argumentasi yang dikonstruksinya dan cenderung berubah. Hasil yang sama pernah disampaikan oleh Liu [43], bahwa justifikasi siswa terhadap argumentasi sangat bervariasi dengan keyakinan yang berbeda-beda, di mana setiap individu memiliki standar tersendiri.

Pada penelitian sebelumnya, Bergqvist [44] pernah mengungkapkan tentang bagaimana siswa memverifikasi suatu konjektur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa umumnya siswa cenderung memilih penalaran abstrak (*abstract reasoning*) dalam menyelesaikan masalah matematis, meskipun kurang latihan. Hasil ini nampak konsisten dengan penelitian-penelitian sebelumnya. Kendatipun begitu, inkonsistensi siswa terhadap justifikasi argumentasi dapat menjembatani rekonstruksi argumentasi ke arah yang lebih formal di mana proses pembuktian mencapai titik yang paling krusial [8].

### 3.2. Diskusi

Hasil penelitian telah memperlihatkan bahwa munculnya beragam tema kajian mengenai penalaran dan argumentasi adalah upaya peneliti untuk mempelajari bagaimana seseorang bernalar dengan sebenarnya. Secara umum penalaran dan argumentasi berfokus pada penalaran itu sendiri, yakni pandangan terhadap penalaran sebagai proses berpikir dan hasil dari proses berpikir [19]. Kedua pandangan ini memiliki kedudukan yang sangat penting dalam penelusuran terhadap penalaran. Hasil dari proses berpikir tidak akan cukup menunjukkan tentang bagaimana seseorang bernalar, tetapi perlu diketahui lebih lanjut tentang bagaimana seseorang menghasilkan proses berpikir tersebut. Sejak muncul kritik terhadap logika formal, penelusuran terhadap proses berpikir menjadi terbuka dan mengantarkan kepada studi yang berkaitan dengan argumentasi dan bukti informal. Pandangan utama dalam studi ini adalah bahwa setiap upaya yang diproduksi untuk suatu konstruksi bukti menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari tahapan dalam pembuktian [45]. Hal ini juga relevan dengan ungkapan matematika sebagai aktivitas manusia (*human activity*) yang menyiratkan bahwa kepentingan matematika bukan untuk matematika itu sendiri, tetapi bagaimana matematika dapat dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari.

Pada mulanya, studi tentang struktur argumentasi dipandang sebagai studi paling fenomenal, yang mampu mengungkapkan kompleksitas dari penalaran dan argumentasi yang dikonstruksi seseorang. Seiring dengan perkembangannya, muncul beragam kritik terhadap struktur argumentasi, khususnya pada skema argumentasi Toulmin, terutama dikaitkan dengan pengajaran terhadap pembuktian matematis pada jenjang pendidikan dasar dan menengah. Beragama studi kemudian muncul, dimulai dari rekonstruksi terhadap argumentasi Toulmin, memformat ulang tentang proses pembuktian pada taksonomi skema bukti, mengkaji tentang tipe argumentasi, serta bagaimana seseorang memberikan justifikasi terhadap argumentasi yang dikonstruksinya. Perubahan studi ini tentu saja tidak perlu dipandang sebagai pencarian terhadap format dan rekonstruksi yang paling baik, karena pada dasarnya semua format dan rekonstruksi masih berlaku dan tetap dipakai oleh para peneliti selanjutnya [31, 34]. Meskipun terkesan statis, tetapi hal yang tidak kalah penting adalah bahwa semua format yang ada tetap mendukung terhadap pencapaian kualitas penalaran dan bagaimana penalaran itu dapat dipelajari.

#### 4. Simpulan

Berdasarkan temuan penelitian dan diskusi terhadap hasil penelitian dapat diungkapkan simpulan; (1) studi terhadap penalaran dan argumentasi adalah upaya yang dilakukan untuk mempelajari bagaimana seseorang bernalar dengan sebenarnya yang berfokus pada proses berpikir (*thinking process*) dan produk dari proses berpikir (*thinking product*), (2) studi terhadap penalaran dan argumentasi mencakup studi yang berkenaan dengan: kemampuan argumentasi, kualitas penalaran, struktur argumentasi, taksonomi skema pembuktian, tipe argumentasi, dan justifikasi argumentasi yang tetap relevan hingga saat ini.

#### Referensi

- [1] Thomas T, Davis T, & Kazlauskas A 2004 Critical thinking and reasoning for information systems students *Issues in Informing Science and Information Technology* **4** 115–131 <https://doi.org/10.28945/724>
- [2] OECD 2022 *PISA 2021 mathematics framework* (Paris: OECD Publishing) <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa-2021-mathematics-framework-draft.pdf>
- [3] Yaman N A P & Jailani 2018 Learning to think mathematically through reasoning and problem solving in secondary school mathematics: A literature review *Proceedings of the 5th International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Sciences* 77–82
- [4] Primadani A I, Mardiyana, & Triyanto 2020 Mathematical reasoning and communication in TGT learning model with PQ4R strategy *Journal Physic of Conference Series* **1613(1)** 1–7 doi: 10.1088/1742-6596/1613/1/012022
- [5] OECD 2016 PISA 2015 Draft mathematics framework in *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy* (Paris: OECD Publishing) 1–52 doi: 10.1787/9789264255425-5-en
- [6] Sukirwan, D. Muhtadi, H. Saleh, and Warsito 2020 Profile of students' justifications of mathematical argumentation *Infinity Journal* **9(2)** 197-212 doi: 10.22460/infinity.v9i2
- [7] NCTM 2020 *Standards for the preparation of secondary mathematics teachers* (Reston, VA)
- [8] Pedemonte B 2008 Argumentation and algebraic proof *ZDM - International Journal Mathematics Education* **40(3)** 385–400 doi: 10.1007/s11858-008-0085-0
- [9] Inglis M, Mejia-Ramos J P, & Simpson A 2007 Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification *Education Study Mathematics* **66(1)** 3–21 doi: 10.1007/s10649-006-9059-8
- [10] Sukirwan, Darhim, & Herman T 2018 Analysis of students' mathematical reasoning *Journal Physic of Conference Series* **948(1)** 1–7 doi: 10.1088/1742-6596/948/1/012036
- [11] NCTM 2000 *Principles and standards for school mathematics* (Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics)
- [12] Sumartini T S 2015 Peningkatan kemampuan penalaran matematis siswa melalui pembelajaran berbasis masalah *Mosharafa Jurnal Pendidikan Matematika* **4(1)** 1–10
- [13] Rizta A, Zulkardi, & Hartono Y 2013 Pengembangan soal penalaran model TIMSS matematika SMP *Jurnal Penelitian dan Evaluasi Pendidikan* **17(2)** 230–240

- doi: 10.21831/pep.v17i2.1697
- [14] Sukirwan, Darhim, Herman T, & Prahmana R C L 2018 The students' mathematical argumentation in geometry *Journal Physic of Conference Series* **943(1)** 1–6 doi: 10.1088/1742-6596/943/1/012026
- [15] Krummheuer G 2000 Studies of argumentation in primary mathematics education *ZDM - Mathematics Education* **5** 155–161 doi: 10.1007/BF02655655
- [16] Toulmin S E 2003 *The uses of argument: Updated edition* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [17] Hanna G 2000 Proof, explanation and exploration: An overview *Education Studies Mathematics* **44(1)** 5–23 doi: 10.1023/A:1012737223465
- [18] Stylianides A J 2007 Proof and proving in school mathematics *Journal For Research in Mathematics Education* **38(3)** 289–321 doi: 10.2307/30034869
- [19] Lithner J 2000 Mathematical reasoning in task solving *Educational Studies in Mathematics* **41(2)** 165–190 doi: 10.1023/A:1003956417456
- [20] Kemdikbud 2006 Standar isi untuk satuan pendidikan dasar dan menengah *Permendikbud Nomor 22 Tahun 2006*
- [21] Hasyim M & Andreina F K 2019 Analisis high order thinking skill (Hots) siswa dalam menyelesaikan soal open ended matematika *FIBONACCI Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika* **5(1)** 55–64 doi: 10.24853/fbc.5.1.55-64
- [22] Rochmad 2010 Proses berpikir induktif dan deduktif dalam mempelajari matematika *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif* **1(2)** 107–117 doi: 10.15294/kreano.v1i2.1494
- [23] Kusuma A P, Waluya S B, Hidayah I, & Rochmad R 2021 Systematic literature review : Proses berpikir aljabar pada pembelajaran matematika in *Prosiding Seminar Nasional Pascasarjana Universitas Negeri Semarang bertema "Problematik Pendidikan Abad 21: Respons Inovatif Jenjang PAUD hingga Perguruan Tinggi* **4(1)** 113–119 <https://proceeding.unnes.ac.id/ex.php/snpsasca/article/view/832/732>
- [24] Putra A & Roza M 2020 Systematic literatur review: Adversity quotient dan self-efficacy dalam pembelajaran matematika *At-Tarbawi Jurnal Pendidikan, Sosial dan Kebudayaan* **7(2)** 184–201 doi: 10.32505/tarbawi.v12i2.2065
- [25] Priharsari D 2022 Systematic literature review di bidang sistem informasi dan ilmu komputer *Jurnal Teknologi Informasi dan Ilmu Komputer* **9(2)** 263–268 doi: 10.25126/jtiik.202293884
- [26] Douek N 1999 Argumentation and conceptualization in context: A case study on sun shadows in primary schools *Educational Studies in Mathematics* **39(1)** 89–110 doi: 10.1023/A:1003800814251
- [27] Zarefsky D 2005 *Argumentation : The study of effective reasoning* (Virginia: The Great Courses Corporate Headquarters)
- [28] Yusdiana B I & Hidayat W 2018 Analisis kemampuan penalaran matematis siswa SMA pada materi limit fungsi *JPMI (Jurnal Pembelajaran Matematika Inovasi* **1(3)** 409–414 doi: 10.22460/jpmi.v1i3.p409-414
- [29] Krummheuer G 2015 Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* 51–74 doi: 10.1007/978-94-017-9181-6\_3
- [30] Jonsson B, Norqvist M, Liljekvist Y, & Lithner J 2014 Learning mathematics

- through algorithmic and creative reasoning *The Journal of Mathematical Behavior* **36** 20–32 doi: 10.1016/j.jmathb.2014.08.003
- [31] Akkurt Y Y & Durmuş S 2022 Tracing proof schemes: Some patterns and new perspectives *Journal of Research and Advances in Mathematics Education* **7(1)** 1–16 doi: 10.23917/jramathedu.v7i1.15740
- [32] Komatsu K & Jones K 2022 Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning *Education Studies Mathematics* **109(3)** 567–591 doi: 10.1007/s10649-021-10086-5
- [33] Liu Y 2013 *Aspects of mathematical arguments that influence eighth grade students' judgment of their validity* (The Ohio State University)
- [34] Sevgi S & Orman F 2020 Eighth grade students' views about giving proof and their proof abilities in the geometry and measurement *International Journal Mathematics Education Science Technology* **53(2)** 467–490 doi: 10.1080/0020739X.2020.1782493
- [35] Guner P & Topan B 2016 Prospective elementary mathematics teachers' abilities of using geometric proofs in teaching of triangle *EFMED-Electronic Journal Science and Mathematics Education* 10(2) 210–210 doi: 10.17522/balikesirnef.277730
- [36] Saputri I, Susanti E, & Aisyah N 2017 Kemampuan penalaran matematis siswa menggunakan pendekatan metaphorical thinking pada materi perbandingan kelas VIII di SMPN 1 Indralaya Utara *Jurnal Elemen* **3(1)** 15–24 doi: 10.29408/jel.v3i1.302
- [37] Hitchcock D 2005 Good reasoning on the Toulmin model *Argumentation* **19(3)** 373–391 doi: 10.1007/s10503-005-4422-y
- [38] Lithner J 2008 A research framework for creative and imitative reasoning *Educational Studies in Mathematics* **67(3)** 255–276 doi: 10.1007/s10649-007-9104-2
- [39] Aberdein A 2005 The uses of argument in mathematics *Argumentation* **19(3)** 287–301 doi: 10.1007/s10503-005-4417-8
- [40] Lee T-N 2015 Developing a theoretical framework to assess Taiwanese primary students' geometric argumentation in *Proceedings of the 38th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* 365–372 [https://merga.net.au/Public/Public/Publications/Conference\\_Proceedings.aspx](https://merga.net.au/Public/Public/Publications/Conference_Proceedings.aspx)
- [41] Harel G & Sowder L 1998 Students' proof schemes: Results from exploratory studies in *Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education* (7th ed., A. H. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky, Eds. Washington, D.C.: American Mathematical Society) 234–283 doi: 10.1090/cbmath/007/07
- [42] Balacheff N 1988 Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics in *Mathematics, Teachers and Children* (D. Pimm, Ed. London: Hodder & Stoughton) 216–235
- [43] Liu Y 2013 *Aspects of mathematical arguments that influence eighth grade students' judgment of their validity* (The Ohio State University)
- [44] Bergqvist T 2005 How students verify conjectures: Teachers' expectations *Journal Mathematics Teaching Education* **8(1)** 171–191 doi: 10.1007/s10857-005-4797-6
- [45] Muhtadi D, Sukirwan, Hermanto R, Warsito, and SunendarA 2020 How do students promote mathematical argumentation through guide-redirecting

---

warrant construction? *Journal Physic of Conference Series* **1613(1)** 1–8 doi:  
10.1088/1742-6596/1613/1/012031