ISBN: 978-602-9250-39-8

MODEL DETERMINISTIK DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK

Denok Novitasari
Mahasiswa Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Siliwangi,
Email: vitasari84.km@gmail.com

ABSTRACT

It has been done a research to get deterministic model of measles spread dynamic and predict some conditions of population. The research is focused on theory Markov process usage in measles diseases spread model with differential equation. The appropriate model to describe the measles diseases spread dynamic on average of large scale population that count on latent period is deterministic model SEIR (Susceptible, Exposed, Infectious, Recovery). The model could interact between population, susceptible in time t (S_t), Exposed in time t (E_t), Infectious in time t (I_t) and Recovery in time t (R_t).
To find out the counting of population number in each condition and each time period it is used matrix Markov A times with population condition score of prior condition. To get the counting in end of period of model ($t \rightarrow \infty$) used matrix $C\Lambda^t C^{-1}$ times to prior condition count by mean of Matlab. So it could be thought that the bigger reproduction number the faster the population to steady condition.

Keywords: *measles, matrix decomposition, Markov process, SEIR model*

ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian untuk mendapatkan model deterministik dari dinamika penyebaran penyakit campak dan memprediksi berbagai keadaan populasi. Penelitian ini memfokuskan pada penggunaan teori proses Markov pada model penyebaran penyakit campak yang berbentuk persamaan diferensi. Model yang sesuai untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit campak pada rata-rata skala populasi besar yang memperhitungkan periode laten adalah model deterministik *SEIR* (*Susceptible, Eksposed, Infectious, Recovery*). Model dapat menggambarkan interaksi antara keadaan populasi, yaitu keadaan *susceptible* pada waktu t (S_t), keadaan *exposed* pada waktu t (E_t), keadaan *infectious* pada waktu ke t (I_t) dan keadaan *recovery* pada waktu t (R_t).
Untuk mengetahui perkiraan jumlah populasi dalam setiap keadaan dan setiap periode waktu digunakan perkalian matriks Markov A dengan nilai keadaan populasi dari periode waktu sebelumnya. Untuk mendapatkan perkiraan keadaan akhir periode dari model ($t \rightarrow \infty$) digunakan dekomposisi matriks $C\Lambda^t C^{-1}$ yang dikalikan dengan kondisi awal yag perhitungannya menggunakan alat bantu Matlab. Sehingga didapatkan perkiraanbahwa semakin besar angka reproduksi campak maka semakin cepat keadaan populasi menuju pada keadaan mantab (steady)

Kata kunci : campak, dekomposisi matriks, model *SEIR*, proses Markov..

1. PENDAHULUAN

Penyakit infeksius (*campak/ gabag / tampek*) merupakan salah satu penyakit menular yang mengancam jiwa banyak anak-anak hingga saat ini. Penyakit campak hanya menyerang manusia (jadi secara bertahap dapat direduksi, eliminasi dan akhirnya dapat di eradikasi). Jika campak menyerang anak dengan gizi kurang, maka anak tersebut terancam bahaya karena daya tahan tubuhnya rendah. Campak

ISBN: 978-602-9250-39-8

mempunyai daya penularan yang sangat tinggi, sering menimbulkan Kejadian Luar Biasa (KLB).

Dikatakan KLB jika ditemukan tiga kasus campak atau lebih dan mengelompok (tempat dan waktu berdekatan) yang bermakna secara epidemiologi. Jika anak tidak mendapat vaksinasi karena ketakutan akan keamanan vaksinasi, maka anak-anak ini akan dapat membahayakan mereka. Tanpa program imunisasi, 90% dari mereka yang mencapai usia 20 tahun pernah menderita campak. Dengan cakupan campak yang mencapai lebih dari 90% dan merata sampai ke tingkat desa diharapkan akan menurun oleh karena terbentuknya kekebalan kelompok (*heard immunity*) (Brotowasisto, 1997)

Penyakit campak ditularkan oleh virus campak (*Morbili*) melalui batuk atau bersin atau bercakap-cakap dengan orang yang terjangkit dan penyakit ini dapat menimbulkan epidemic (wabah). Tahap infeksi sekitar 10 – 14 hari dengan periode laten 8 hari dan durasi infektivitas 7 hari. Ditinjau dari aspek biologi, mekanisme penyebaran terjadinya penyakit campak mengikuti urutan : *susceptibles, exposed, infectious* dan *recovereds* (*Trotier* dan *Philippe*, 2001)

Dua tipe model yang berguna untuk mengkaji penyakit infeksius pada skala populasi adalah model stokastik dan model deterministik. Model stokastik mengandalkan pada variasi kesempatan antar individu dalam resiko kedapatan penyakit dan faktor-faktor lain. Model stokastik digunakan jika fluktuasi kesempatan atau keheterogenan penting dalam populasi kecil atau terasing. Secara matematis, model stokastik sangat rumit dan tidak memberikan penjelasan mengenai dinamikanya. Sedangkan model deterministik mencoba menerangkan apa yang terjadi pada rata-rata skala populasi dan model cocok untuk populasi besar.

Model deterministik yang diformulasikan dalam model *SIR* merupakan model kompartemen dengan tiga kompartemen, yaitu *Susceptibles, Infecteds* dan *Recovereds.* Model *SIR* lebih cocok jika perantara infeksius tanpa periode laten. Apabila periode laten dari penyakit diperhitungkan dalam model, maka model *SEIR* lebih relevan. Model *SEIR* ini memuat empat kompartemen, yaitu : *Susceptibles, Exposed, Infecteds* dan *Recovery.* (Trottier dan Philippe, 2001)

Ditinjau dari pengambilan ukuran populasi, terdapat dua tipe model yang berbeda. Dalam model pertama, total populasi diambil mendekati konstan di mana

ISBN: 978-602-9250-39-8

populasi dibagi ke dalam grup yang *susceptible, infected* dan *Recovered* atau mungkin di tambah grup lain tergantung pada jenis penyakitnya. Dalam model lain, ukuran populasi tidak tetap dipengaruhi oleh laju kelahiran, laju kematian dan sebagainya.

Kekuatan dari infeksi dalam populasi tergantung pada angka reproduksi dasar (Ko) yang didefinisikan sebagai rata-rata jumlah orang yang langsung terinfeksi oleh kasus infeksius selama ia berada dalam periode infeksius jika ia masuk populasi *susceptible* total. Jika *Ko<1*, maka penyakit hilang. Jika *Ko*>1, maka penyakit menyebar dalam populasi (terjadi endemik). Jika *Ko*=1, maka penyakit tetap endemic sebagai salah satu infeksius menyebarkan agen infeksius ke satu *susceptible* (Trottier dan Philippe, 2002).

Proses stokastik adalah sebarang barisan eksperimen dimana hasil akhir pada setiap tingkat tergantung pada kesempatan. Proses Markov adalah suatu proses stokastik dengan sifat-sifat sebagai berikut :

i. Himpunan hasil atau keadaan yang mungkin adalah berhingga
ii. Probabilitas dari hasil berikutnya tergantung hanya kepada hasil sebelumnya
iii. Probabilitas adalah konstan sepanjang waktu (Leon, 1998)

Definisi. Jika sebuah Rantai Markov memiliki *n* keadaan yang mungkin, yang disebut *1, 2, 3, ..., n* maka probabilitas bahwa sistem itu adalah dalam keadaan *i* pada sebarang pengamatan sesudah sistem itu adalah dalam keadaan *j* pada pengamatan sebelumnya ditandai a_{ij} dan disebut kemungkinan peralihan (*transition probability*) dari keadaan *j* ke keadaan *i*. Matriks $A = [a_{ij}]$ disebut matriks peralihan dari Rantai Markov (Anton, 1987)

Definisi keserupaan dua matriks. Dua matriks *A* dan Λ adalah matriks $n \times n$, dikatakan bahwa Λ serupa (similar) dengan *A* jika ada matriks *C* orde $n \times n$ sedemikian sehingga $\Lambda = C^{-1}AC$ (Grossman, 1995)

Teorema. Matriks $A_{m \times n}$ dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika *A* mempunyai *n* nilai eigen vektor yang bebas linear. Dalam hal ini matriks diagonal *A* serupa dengan Λ diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-9250-39-8

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen A. Jika C adalah matriks yang kolomnya vektor eigen bebas linear dari A maka $\Lambda = C^{-1}AC$ (Grossman, 1995)

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

1) mendapatkan model deterministik yang sesuai dalam memodelkan dinamika penyeberan penyakit campak.

2) memprediksi atau memperkirakan berbagai keadaan populasi dai model dinamika penyebaran penyakit campak.

Dari hasil kajian yang berupa prediksi model dinamika penyebaran penyakit campak ini sekiranya dapat memberikan gambaran awal mengenai berbagai keadaan suatu populasi yang terjangkit penyakit campak sehingga dapat diketahui besar kecilnya potensi penularan penyakit campak pada suatu populasi tertentu. Dengan demikian kajian ini dapat dijadikan dasar untuk mendapatkan beberapa aspek penting dari dinamika populasi manusia dalam masalah epidemik melalui model matematika sehingga dapat diketahui seberapa cepat suatu penyakit ditularkan atau disebarkan dimana ini penting untuk mengimplementasikan tindakan pengendalian dan pencegahan penyakit menular lebih lanjut.

Penelitian ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah, yaitu:

1) Model yang diperhatikan didasarkan pada model deterministik *SEIR* (*Susceptibles, Exposed, Infectious, Recovery*).

2) Secara keseluruhan proses pemodelan dinamika penyebaran penyakit campak ini memfokuskan pada penggunaan teori proses Markov untuk model epidemik yang berbentuk persamaan diferensi.

3) Parameter-parameter model diasumsikan sama dengan parameter dalam kondisi awal (tahun 2000).

2. METODE PENELITIAN

Dalam penalitian ini, model deterministik dinamika populasi penyebaran penyakit campak menggambarkan peralihan antar kompartemen-kompartemen yang berbeda dari model penyakit campak adalah model deterministik *SEIR* yaitu model yang didasarkan pada mekanisme epidemik sebagai berikut :

ISBN: 978-602-9250-39-8

$$\boxed{S_t} \xrightarrow{i} \boxed{E_t} \xrightarrow{f} \boxed{I_t} \xrightarrow{r} \boxed{R_t}$$

Gambar 1. Model penyebaran epidemic

dimana variabel dan parameter yang digunakan pada model adalah :

1) *Susceptible* (S_t) adalah jumlah individu pada pola waktu ke t yang sehat tetapi mungkin dapat tertular penyakit.

2) *Exposed* (E_t) adalah jumlah individu pada pola waktu ke t yang tertular penyakit tetapi belum menulari pada individu yang lain.

3) *Infectious* (I_t) adalah jumlah individu pada pada waktu ke t yang tertular penyakit dan menjadi penular bagi individu yang lainnya.

4) *Recovered* (R_t) adalah jumlah individu pada waktu ke t yang mati atau yang sembuh dan sekarang telah kebal.

5) Laju infeksi (i) adalah tingkat laju individu *susceptible* menjadi *exposed* terhadap waktu, dimana Laju infeksi (i) $= \frac{K}{N\,.\,D}\,.\,I$ dengan N ukuran populasi, K angka reproduksi, D rata-rata durasi keinfeksian dan I jumlah awal individu *infectious.*

6) Laju infektivitas (f) adalah tingkat laju individu *exposed* menjadi *infectious* terhadap waktu, dimana Laju infektivitas (f) $= \frac{1}{rata-rata\ periode\ laten}$.

7) Laju *recovery* (r) adalah tingkat laju kesembuhan individu setelah *infectious* terhadap waktu, dimana laju recovery (r) $= \frac{1}{rata-rata\ durasi\ keinfeksian}$

Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data sekunder mengenai banyaknya kasus penyakit campak yang di ambil dari Dinas Kesehatan Kabupaten Malang dan data jumlah penduduk di Kabupaten Malang hasi registrasi tahun 2000 Untuk memudahkan perhitungan dan menentukan pendekatan penyelesaian model epidemik campak akan digunakan alat bantu Matlab.

Penelitian ini terdiri atas dua tahap, yaitu:

1) mengkostruksi model *SEIR* berdasarkan rancangan penelitian menggunakan persamaan diferensi.

2) Memprediksi atau memperkirakan keadaan akhir populasi dan model dinamika populasi penyebaran penyakit campak.

Secara keseluruhan proses ini menggunakan matriks Markov (A). Dalam menentukan apa yang akan terjadi pada waktu ke t dan keadaan akhir ($t\rightarrow\infty$) jika

ISBN: 978-602-9250-39-8

kondisi awal dan parameter model diberikan menggunakan alat bantu Matlab dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A dan menyatakan C adalah matriks vektor eigen dan $\Lambda = C^{-1}AC$ adalah matriks eigen.

2) Untuk menentukan presentase orang dalam setiap keadaan dan setiap periode waktu dihitung dengan rumus $\bar{U}_{t+1} = A\bar{U}_t$ atau plot model untuk berbagai perubahan keadaan (jumlah orang) terhadap waktu (hari).

3) Menentukan Λ^t dan keadaan akhir ($t\to\infty$) dari model dapat dihitung dengan rumus $\bar{U}_\infty = A^t.\bar{U}_0$ dengan $A^t = C\Lambda^t C^{-1}$ kemudian plot model waktu yang lama..

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Secara skematis pola penyebaran penyakit campak dapat di gambarkan seperti pada gambar 1. Maka penyebaran penyakit campak dapat dimodelkan secara matematis dalam persamaan diferensi non linear orde satu sebagai berikut :

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t - iS_t \\ E_{t+1} = E_t + iS_t - fE_t \\ I_{t+1} = I_t + fE_t - rI_t \\ R_{t+1} = R_t + rI_t \end{cases}$$

dengan *N=S+E+I+R*

Pola penyebaran penyakit campak yang dimodelkan dalam persamaan diferensi di atas dapat dibentuk menjadi suatu matriks berikut

$$\begin{bmatrix} S_{t+1} \\ E_{t+1} \\ I_{t+1} \\ R_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 & 0 \\ i & 1-f & 0 & 0 \\ 0 & f & 1-r & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_t \\ E_t \\ I_t \\ R_t \end{bmatrix}$$

Atau dalam persamaan diferensi, matrika di atas dapat dibentuk $\bar{U}_{t+1} = A\bar{U}_t$ dimana A menunjukkan matriks Markov.

Berdasarkan tabel pertumbuhan dan kepadatan penduduk tahun 2000 jumlah kepadatan penduduk kota Malang 2.382.258 jiwa (http://www.kabmalang.go.id). Menurut pencatatan data dinas kesehatan kabupaten Malang, jumlah penderita campak tahun 2000 di kabupaten Malang 155 jiwa. Dari jumlah penderita campak diasumsikan 40% (=64 jiwa) termasuk kelompok *exposed* dan 60% (=93 jiwa) termasuk kelompok *infectious*. Sisa jumlah penduduk yang tidak terserang campak termasuk ke dalam kelompok *susceptible.*

ISBN: 978-602-9250-39-8

Diasumsikan angka reproduksi campak (K) adalah 5, 10, 15 (Trottier dan Philippe, 2002). K=5 artinya tiap individu *infectious* akan menularkan penyakitnya pada 5 individu *susceptible* rata-rata selama periode laten. Dengan demikian untuk waktu t = 0 di peroleh, So=2.382.103, Eo=62, Io=93, Ro=0, i=0,0000279, f=0,125, r=0,1428571 sehingga diperoleh:

Kondisi populasi awal ($\overline{U}_0$) = $\begin{bmatrix} S_0 \\ E_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.382.103 \\ 62 \\ 93 \\ 0 \end{bmatrix}$

Kondisi populasi waktu ke *t+1* ($\overline{U}_{t+1} = A\ \overline{U}_t$)

$$\begin{bmatrix} S_{t+1} \\ E_{t+1} \\ I_{t+1} \\ R_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9999721 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0000279 & 0{,}875 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}8571429 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1428571 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_t \\ E_t \\ I_t \\ R_t \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks (A)= $\begin{bmatrix} 0{,}9999721 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0000279 & 0{,}875 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}8571429 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1428571 & 1 \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari matriks A, yaitu

$$\begin{vmatrix} 0{,}9999721-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0000279 & 0{,}875-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}8571429-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1428571 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(0{,}9999721-\lambda)\ (0{,}875-\lambda)\ (0{,}8571429-\lambda)\ (1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0{,}9999721, \lambda_2 = 0{,}875, \lambda_3 = 0{,}8571429, \lambda_4 = 1$$

Dengan menggunakan program Matlab di peroleh matriks vektor eigen, matrikas invers vektor eigen dan matriks diagonal sebagai berikut :

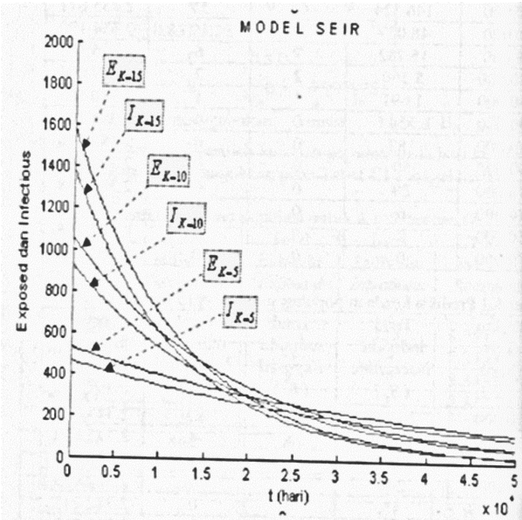
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}7069588 \\ 0 & 0 & 0{,}0936585 & 0{,}0001577 \\ 0 & 0{,}7071068 & 0{,}6556101 & 0{,}0001381 \\ 1 & -0{,}7071678 & -0{,}7492686 & -0{,}7072546 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}0019327 & -9{,}8994949 & 1{,}4142136 & 0 \\ -0{,}0023823 & 10{,}6770782 & 0 & 0 \\ 1{,}4145095 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

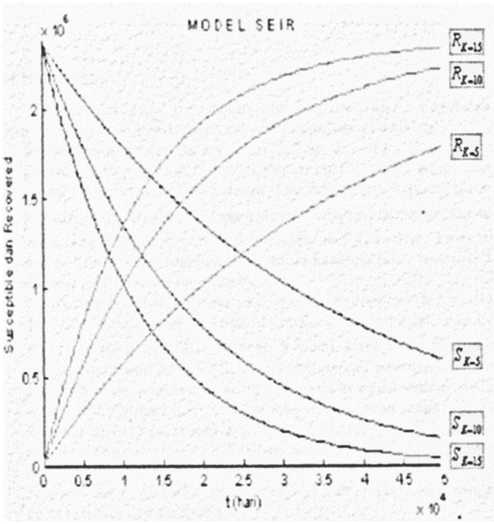
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8571428 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9999721 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-9250-39-8

Dengan menggunakan rumus $\overline{U}_t = A^t \, \overline{U}_0$ dengan $A^t = C\Lambda^t C^{-1}$ maka diperoleh keadaan populasi pada hari ke t ((t>1) jika K=5 maka populasi akan menuju pada keadaan mantab pada waktu 550.000 hari, jika K=10 maka populasi akan menuju pada keadan mantab pada waktu 270.000 hari dan jika K=15 maka populasi akan menuju pada keadaan mantab pada waktu 190.000 hari. Untuk lebih jelasnya gambaran mengenai dinamika penyebaran penyakit campak dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 2. Grafik *Exposed* dan *Infectious* dengan berbagai nilai K



Gambar 3. Grafik *Susceptible* dan *Exposed* dengan berbagai nilai K

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilaksanakan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1) Model yang sesuai dalam memodelkan dinamika penyebaran penyakit campak adalah model deterministik *SEIR*. Kemudian model tersebut dapat diformulasikan ke dalam bentuk rantai Markov yaitu $\overline{U}_{t+1} = A \, \overline{U}_t$ yang dapat menggambarkan peralihan antar kompartemen penyakit campak menggunakan langkah waktu diskrit yang menyatakan jumlah keadaan pada waktu ke *t+1* dengan syarat waktu t terlebih dahulu.

2) Untuk mendapatkan perkiraan keadaan akhir populasi dari model dinamika penyebaran penyakit campak digunakan dekomposisi matriks $C\Lambda^t C^{-1}$ yang dikalikan dengan kondisi awal yang dihitung dengan alat bantu Matlab. Sehingga didapatkan perkiraan bahwa jika K=5 maka populasi akan menuju pada keadaan mantab pada

ISBN: 978-602-9250-39-8

waktu 550.000 hari, jika K=10 maka populasi akan menuju pada keadan mantab pada waktu 270.000 hari dan jika K=15 maka populasi akan menuju pada keadaan mantab pada waktu 190.000 hari. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar angka reproduksinya (K) maka semakin cepat keadaan populasi menuju pada keadaan mantab (*steady*)

Saran dari penilitian ini bahwa kajian ini dapat digunakan sebagai acuan penelitian selanjutnya pada penyakit infeksius lainnya tetapi disarankan laju kelahiran, kematian, vaksinasi dan migrasi diperhitungkan dalam memodelkan penyakit infeksius ini. Sebagai alternatif, perhitungan proses pemodelan dinamika penyebaran penyakit infeksius dapat digunakan persamaan differensial.

REFERENSI

Anonymous, 2006, *Data Kasus Campak di Kabupaten Malang,* Dinas Kesehatan Kabupaten Malang

Anton, H., 1987, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Jakarta

Anton, H., 1987, *Penerapan Aljabar Linear*, Erlangga, Jakarta.

Brotowasisto, 1997, *Petunjuk Teknis Imunisasi Campak Dalam Rangka Akselerasi Reduksi Campak,* Panitia Pekan Imunisasi Nasional, Tingkat Pusat Jakarta.

Grossman, S.I, 1995, *Multivariable Calculus, Linier Algebra and Differential Equation,* third edition, Savador College Publishing, USA.

http://www.kabmalang.go.id/ , Akses: 4 Agustus 2006, jam 17.10 wib

Marsudi, 2006, *Teori Proses Markov pada Model Epidemik Influensa,* Makalah Seminar Basic Science III, FMIPA, Unibraw, Malang.

Leon,S.J, 1998 *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, Erlangga, Jakarta.

Trotier, H dan Philippe P., 2001, *Deterministic Modeling of Infectious Diseases: Theory and Methods,* The Internet Journal of Infectious Diseases, volume 1 number 2, https://www.ispud.com/ostia/index.php?xmlFilePath=journals/ijidvol1no2/model.xml, Akses: 23 Maret 2006, jam 10.00 wib

Trotier, H dan Philippe P., 2002, *Deterministic Modeling of Infectious Diseases: Application to Measles and Other Similar Infectious, ,* The Internet Journal of Infectious Diseases, volume 2 number 1,

Weerapana, A., 2003, *Lecture 20: Markov Chain,* http://www.math.ucalgary.ca/~laf/teaching/material/economics/markovchains.pdf#search='markov%20chains%30Akila%20weerapana'. Akses :23 Maret 2006, jam 11.15 wib.